

ANALIZA TAČNOSTI TETRAEDARSKIH KONAČNIH ELEMENATA SA I BEZ MEĐUČVOROVA

ACCURACY ANALYSIS OF TETRAHEDRAL FINITE ELEMENTS WITH AND WITHOUT MIDNODES

Milan Bojović¹, Dragan Rakić¹, Miroslav Živković¹
Fakultet inženjerskih nauka, Univerzitet u Kragujevcu¹

Sadržaj – U radu je izvršeno poređenje tačnosti rezultata dobijenih upotrebom 3D konačnih elemenata, sa i bez međučvorova, oblika tetraedra i heksaedra za dva primera sa analitičkim rešenjem.

Abstract – In this paper it was performed comparison of results from 3D finite elements with and without midnodes of tetrahedral and hexagonal shaped elements for two examples with analytical solutions.

1. UVOD

Naponsko-deformacioni proračun je sproveden u tri softverska paketa, PAK [1], Nastran [2] i Abaqus [3], sa ciljem poređenja tačnosti tetraedarskih elemenata ugrađenih u program PAK.

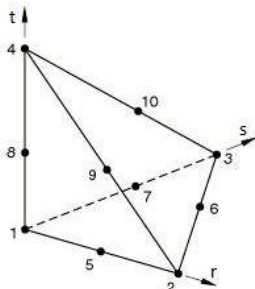
PAK (Program za Analizu Konstrukcija) je softver za analizu metodom konačnih elemenata, koji se razvija na Fakultetu inženjerskih nauka u sklopu Laboratorije za inženjerski softver. Program se sastoji od više modula (PAK-S - strukturna analiza, PAK-T - linearna i nelinearna termička analiza, PAK-F - analiza laminarnog protoka nestišljivog fluida, PAK-P - analiza protoka fluida kroz deformabilne porozne medije, PAK-B - analize u oblasti biomehanike, modeliranje mišića, vezivnog tkiva, protoka krvi, PAK-FM - analiza problema mehanike loma i zamora). Program u sebi ima ugrađen veliki broj različitih 1D, 2D i 3D tipova konačnih elemenata, kao i veliki broj linearnih i nelinearnih materijalnih modela. Jedno od poslednjih poboljšanja u programu je i implementacija 3D tetraedarskih elemenata sa međučvorovima, čije su interpolacione funkcije date u teorijskom delu.

Nastran i Abaqus su dva od najčešće korišćenih komercijalnih programa za analizu metodom konačnih elemenata, sa mogućnosti međusobnog eksportovanja i učitavanja fajlova sa podacima o modelu, zbog čega su i izabrani za poređenje.

Mreža konačnih elemenata za izabrane primere je pripremljena u programskom paketu Femap, unutar koga su zadata definisana ograničenja i opterećenja.

2. TEORIJSKE OSNOVE

Tetraedarski konačni element sa međučvorovima prikazan je na slici 1. U tabeli 1 date su interpolacione funkcije korišćene za linearni i nelinearni element [4], [5], [6].



Slika 1. Tetraedarski konačni element sa međučvorovima

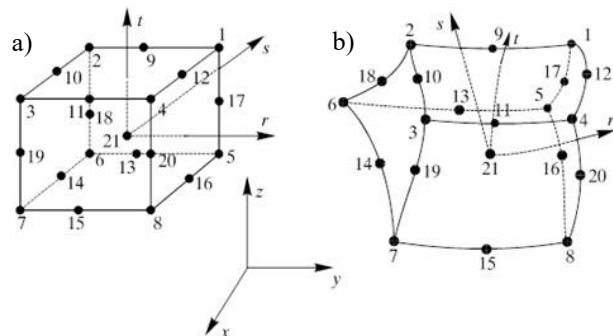
Tabela 1. Interpolacione funkcije za tetraedarski konačni element

		$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$	$i=10$
h_1	$1-r-s-t$	$-\frac{1}{2}h_5$		$-\frac{1}{2}h_7$	$-\frac{1}{2}h_8$		
h_2	r	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_6$			$-\frac{1}{2}h_9$	
h_3	s		$-\frac{1}{2}h_6$	$-\frac{1}{2}h_7$			$-\frac{1}{2}h_{10}$
h_4	t				$-\frac{1}{2}h_8$	$-\frac{1}{2}h_9$	$-\frac{1}{2}h_{10}$
h_5	$4r(1-r-s-t)$						
h_6	$4rs$						
h_7	$4s(1-r-s-t)$						
h_8	$4t(1-r-s-t)$						
h_9	$4rt$						
h_{10}	$4st$						

Za 3D konačni element heksaedra sa osam čvorova interpolacione funkcije su [7]:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t) & h_5 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t) \\
 h_2 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t) & h_6 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t) \\
 h_3 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t) & h_7 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t) \\
 h_4 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t) & h_8 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)
 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Funkcije su linearne po r, s, t i njihov položaj je prikazan na slici 2 u prirodnom i globalnom koordinatnom sistemu.



Slika 2. 3D element sa 21 čvorom a) Prirodni koordinatni sistem, r, s, t . b) Dekartov koordinatni sistem x, y, z

Prema numeraciji sa slike 2 interpolacione funkcije sa uključenim međučvorovima se mogu izraziti:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= g_1 - \frac{1}{2}(g_9 + g_{12} + g_{17}) & h_5 &= g_5 - \frac{1}{2}(g_{13} + g_{16} + g_{17}) \\
 h_2 &= g_2 - \frac{1}{2}(g_9 + g_{10} + g_{18}) & h_6 &= g_6 - \frac{1}{2}(g_{13} + g_{14} + g_{18}) \\
 h_3 &= g_3 - \frac{1}{2}(g_{10} + g_{11} + g_{19}) & h_7 &= g_7 - \frac{1}{2}(g_{14} + g_{15} + g_{19}) \quad (1.2) \\
 h_4 &= g_4 - \frac{1}{2}(g_{11} + g_{12} + g_{20}) & h_8 &= g_8 - \frac{1}{2}(g_{15} + g_{16} + g_{20}) \\
 & & h_k &= g_k \quad k = 9, 10, \dots, 20 \\
 & & h_k &= 0 \quad \text{ako \u010dvor ne postoji}
 \end{aligned}$$

gde su funkcije g_i odre\u0111ene:

$$\begin{aligned}
 g_k &= G(r, r_k)G(s, s_k)G(t, t_k) \\
 G(\beta, \beta_k) &= \frac{1}{2}(1 + \beta_k \beta) \quad \text{za } \beta_k = \pm 1 \quad \beta = r, s, t \quad (1.3) \\
 G(\beta, \beta_k) &= 1 - \beta^2 \quad \text{za } \beta_k = 0
 \end{aligned}$$

Na slici 2 se vidi i \u010dvor 21 u te\u017ei\u0161tu elementa, on nije kori\u0161ćen pri analizi ve\u0107 su pore\u0111eni elementi sa 8 i 20 \u010dvorova.

3. ANALIZIRANI PRIMERI

3.1. TEST PRIMER 1 - UVIJENA GREDA

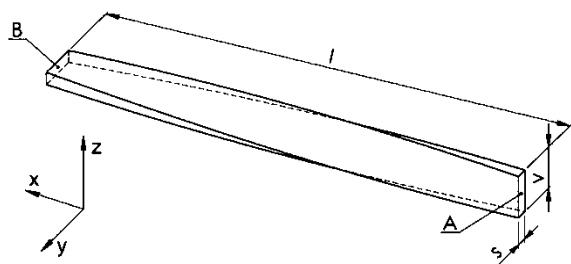
Uvijena greda prikazana na slici 3, na jednom svom kraju, ima fiksirana pomeranja u svim pravcima, a na drugom je zadata sila koja optere\u0107uje gredu na savijanje [8]. Definirana su dva slu\u010daja optere\u0107enja u zavisnosti od pravca dejstva sile.

Analizirano je kori\u0161ćenje heksaedarskih i tetraedarskih 3D kona\u010dnih elemenata za razli\u010diti broj podela po du\u017einu grede slika 4 i 5.

Dimenzije grede: du\u017eina $l = 12m$, visina $v = 1.1m$ \u0161irina $s = 0.32m$

Stranice povr\u0161ine A i povr\u0161ine B su me\u0111usobno zarotirane za 90° .

Materijalne karakteristike: modul elasti\u010dnosti $E = 29MPa$ Poasonov koeficijent $\nu = 0.3$.



Slika 3. Geometrija uvijene grede

Ograni\u010denja: na povr\u0161ini A su ograni\u010dena pomeranja $u_x = 0, u_y = 0, u_z = 0$.

Optere\u0107enje:

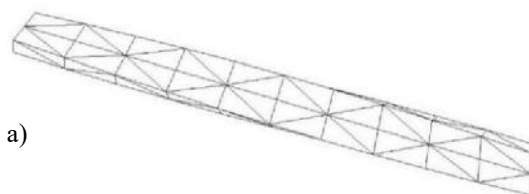
Test 1: optere\u0107enje je zadato preko sile na povr\u0161inu B u pravcu y ose: $F_y = 1N$

Test 2: optere\u0107enje je zadato preko sile na povr\u0161inu B u pravcu z ose: $F_z = 1N$

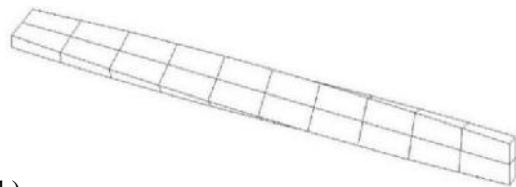
Analiti\u010dka re\u0161enja:

Test 1: za optere\u0107enje u pravcu y ose $F_y = 1N$, pomeranje slobodnog kraja grede iznosi $u_y = 5.42mm$

Test 2: za optere\u0107enje u pravcu z ose $F_z = 1N$, pomeranje slobodnog kraja grede iznosi $u_z = 1.75mm$

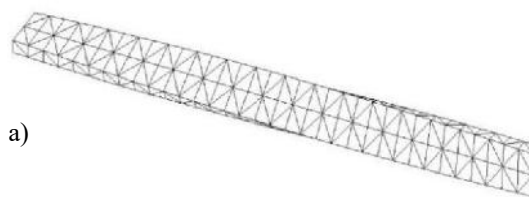


a)

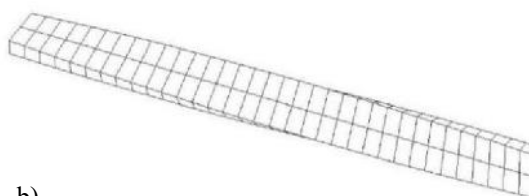


b)

Slika 4. Izgled grube mre\u017ee a) tetraedar b) heksaedar



a)



b)

Slika 5. Izgled fine mre\u017ee a) tetraedar b) heksaedar

U tabelama 2 i 3 dat je uporedni prikaz numerikih re\u0161enja ukupnih maksimalnih vrednosti pomeranja pri optere\u0107enju definisanom u testu 1. Numeri\u010dka re\u0161enja za test 2 data su u tabelama 4 i 5, re\u0161enja su data u milimetrima.

Tabela 2. Test 1, numerikih rezultati za tetraedarske elemente $u_y = 5.42mm$

Prog.\br.	10	18	26	34
	PAK	0.329	0.694	1.125
Nastran	0.329	0.694	1.125	1.505
Abaqus	0.329	0.694	1.125	1.505

Prog.\br.	10	18	26	34
	PAK	5.374	5.399	5.407
Nastran	5.374	5.399	5.407	5.414
Abaqus	5.374	5.399	5.407	5.414

Tabela 3. Test 1, numerikih rezultati za heksagonalne elemente $u_y = 5.42mm$

Prog.\br.	10	18	26	34
	PAK	5.378	5.412	5.421
Nastran	5.385	5.401	5.405	5.407
Abaqus	0.923	2.424	4.015	5.395

Prog.\br.	10	18	26	34
	PAK	5.424	5.415	5.416
Nastran	5.421	5.413	5.414	5.416
Abaqus	5.398	5.409	5.412	5.414

Tabela 4. Test 2, numerički rezultati za tetraedarske elemente $u_z = 1.75mm$

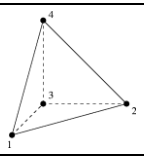
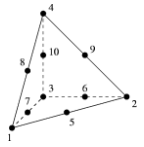
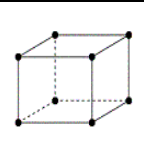
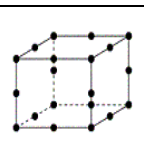
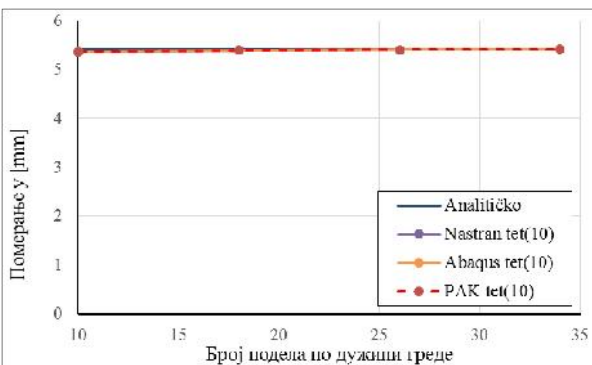
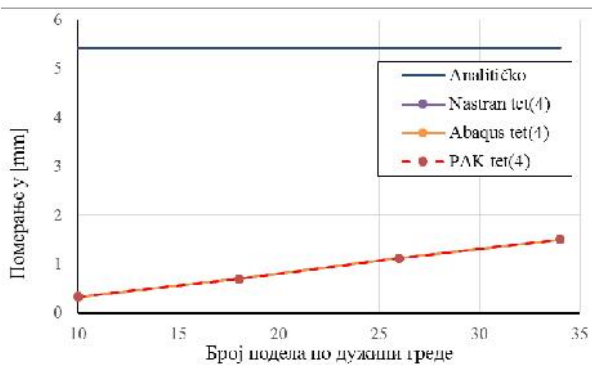
	Prog.\br.	10	18	26	34
	PAK	0.224	0.413	0.616	0.662
	Nastran	0.224	0.413	0.616	0.662
	Prog.\br.	10	18	26	34
	PAK	1.751	1.754	1.754	1.754
	Nastran	1.751	1.754	1.754	1.754
	Abaqus	1.751	1.754	1.754	1.754

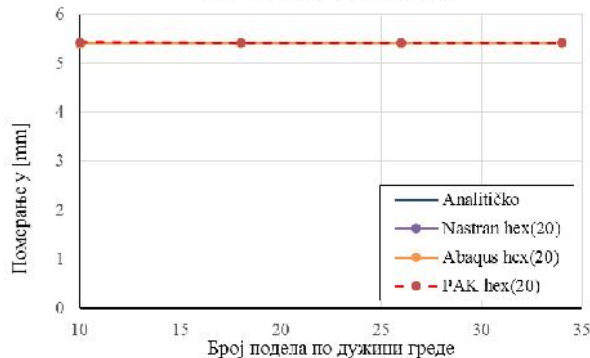
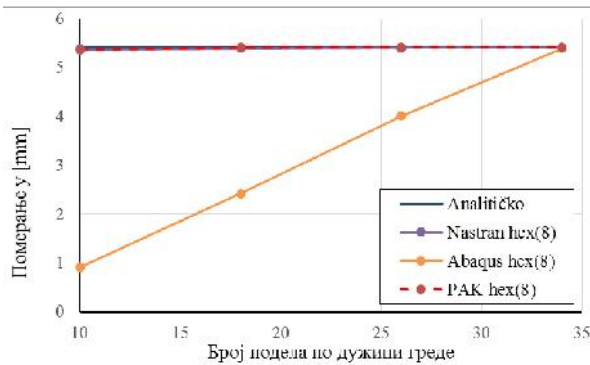
Tabela 5. Test 2, numerički rezultati za heksagonalne konačne elemente $u_z = 1.75mm$

	Prog.\br.	10	18	26	34
	PAK	1.724	1.743	1.748	1.749
	Nastran	1.725	1.74	1.744	1.746
	Prog.\br.	10	18	26	34
	PAK	1.766	1.757	1.755	1.754
	Nastran	1.765	1.756	1.754	1.753
	Abaqus	1.757	1.755	1.754	1.753

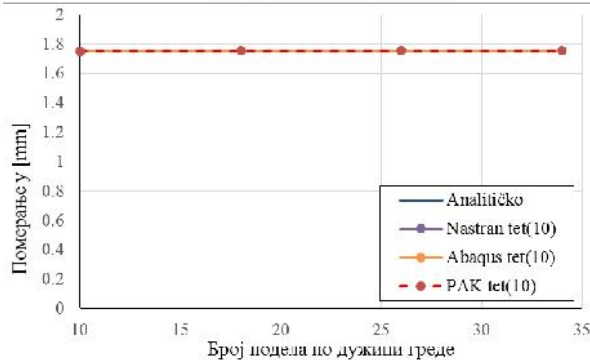
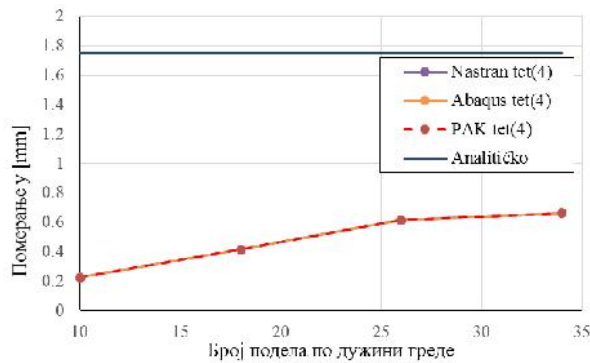
Dijagramski prikaz rezultata dobijenih primenom različitih programskih paketa, za korišćenje elemente sa i bez međučvorova, je dat na slikama 6 - 9.



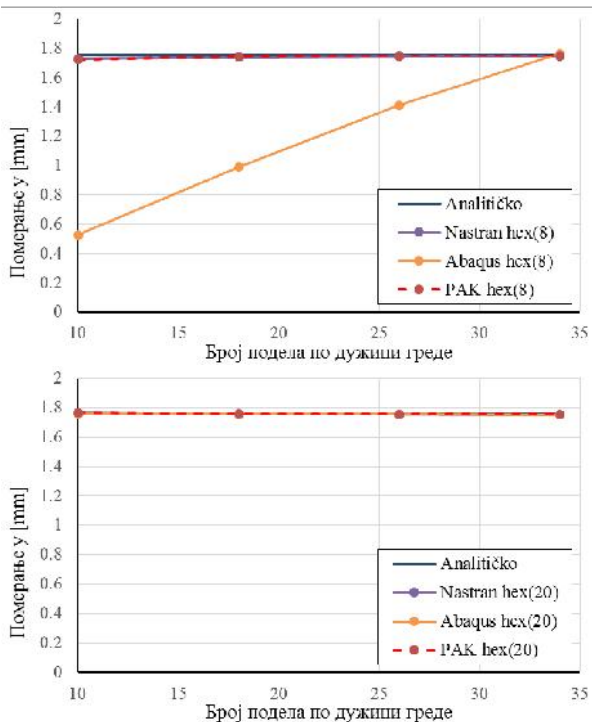
Slika 6. Maksimalno pomeranje uvijene grede, test 1



Slika 7. Maksimalno pomeranje uvijene grede, test 1



Slika 8. Maksimalno pomeranje uvijene grede, test 2



Slika 9. Maksimalno pomeranje uvijene grede, test 2

3.2. TEST PRIMER 2 - ZAKRIVLJENA GREDA

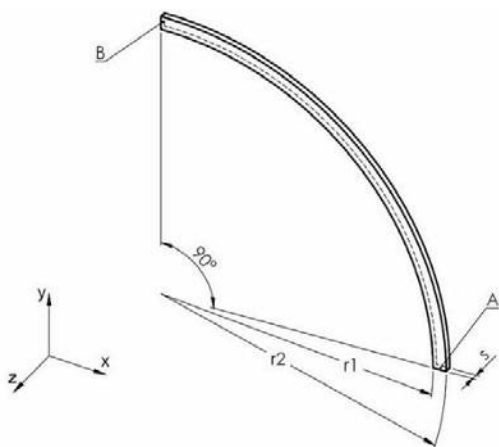
Zakrivljena greda prikazana na slici 10, na jednom svom kraju, ima fiksirana pomeranja u svim pravcima, a na drugom je zadata sila koja opterećuje gredu na savijanje [8]. Definisana su dva slučaja opterećenja u zavisnosti od pravca dejstva sile.

Analizirano je korišćenje tetraedarskih i heksaedarskih 3D konačnih elemenata za različiti broj podela po dužini grede slika 11 i 12.

Dimenzije grede: unutrašnji poluprečnik $r_1 = 4.12m$, spoljašnji prečnik $r_2 = 4.32m$, širina $s = 0.1m$.

Stranice površine A i površine B su međusobno zarotirane za 90° .

Materijalne karakteristike: modul elastičnosti $E = 10MPa$ Poasonov koeficijent $\nu = 0.25$.



Slika 10. Geometrija zakrivljene grede

Ograničenja: na površini A su ograničena pomeranja $u_x = 0, u_y = 0, u_z = 0$.

Opterećenje:

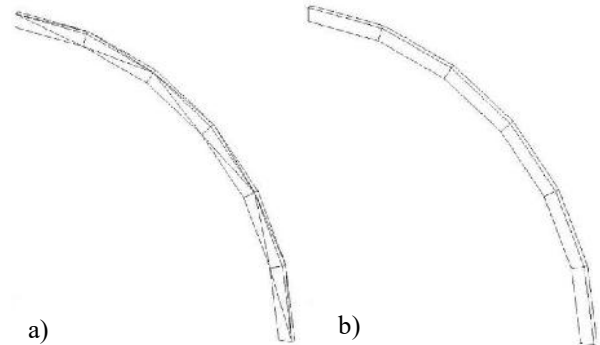
Test 1: opterećenje je zadato preko sile na površinu B u pravcu y ose: $F_y = 1N$

Test 2: opterećenje je zadato preko sile na površinu B u pravcu z ose: $F_z = 1N$

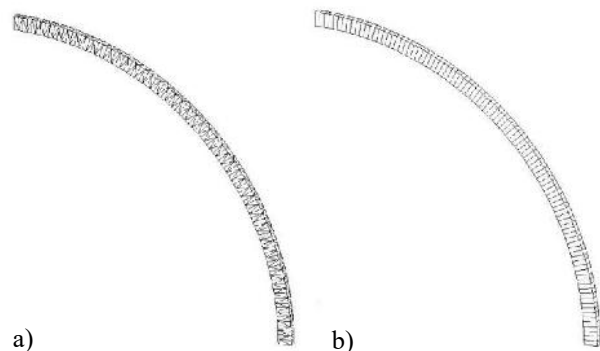
Analitička rešenja:

Test 1: za opterećenje u pravcu y ose $F_y = 1N$, pomeranje slobodnog kraja grede iznosi $u_y = 87.34mm$

Test 2: za opterećenje u pravcu z ose $F_z = 1N$, pomeranje slobodnog kraja grede iznosi $u_z = 502.2mm$



Slika 11. Izgled grube mreže a) tetraedar b) heksaedar



Slika 12. Izgled fine mreže a) tetraedar b) heksaedar

U tabelama 6 i 7 dat je uporedni prikaz numeričkih rešenja ukupnih maksimalnih vrednosti pomeranja pri opterećenju definisanom u testu 1. Numerička rešenja za test 2 data su u tabelama 8 i 9, rešenja su data u milimetrima.

Dijagramski prikaz rezultata dobijenih primenom različitih programskih paketa, za korišćenje elemente sa i bez međučvorova, je dat na slikama 13 – 16.

Tabela 6. Test 1, numerički rezultati za tetraedarske elemente $u_y = 87.34mm$

	Prog.\br	6	12	24	48	96
	PAK	2.31	7.97	20.7	33.85	35.4
	Nastran	2.31	7.97	20.7	33.87	35.4
	Abaqus	2.31	7.97	20.7	33.84	35.4
	Prog.\br	6	12	24	48	96
	PAK	86.42	87.77	88.14	88.4	88.35
	Nastran	86.46	87.76	88.22	88.39	88.44
	Abaqus	86.46	87.76	88.22	88.39	88.44

Tabela 7. Test 1, numerički rezultati za heksagonalne elemente $u_y = 87.34mm$

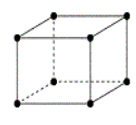
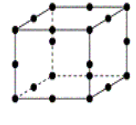
	Prog.\br.	6	12	24
	PAK	76.87	87.3	88.27
	Nastran	76.89	87.3	88.27
	Prog.\br.	6	12	24
	PAK	88.26	88.25	88.71
	Nastran	88.48	88.07	88.31
	Abaqus	87.11	88	88.29

Tabela 8. Test 2, numerički rezultati za tetraedarske elemente $u_z = 502.2mm$

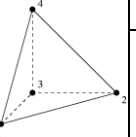
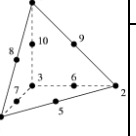
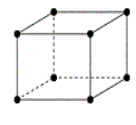
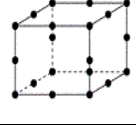
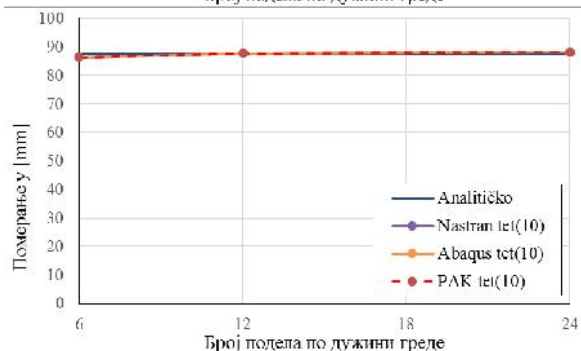
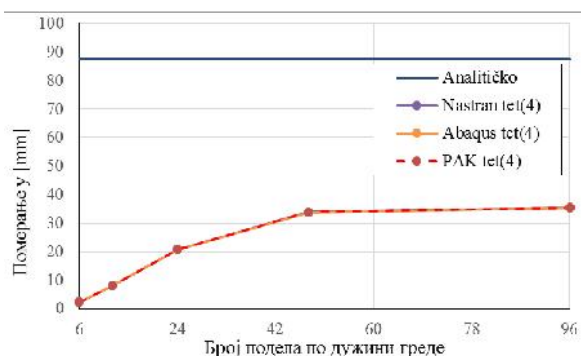
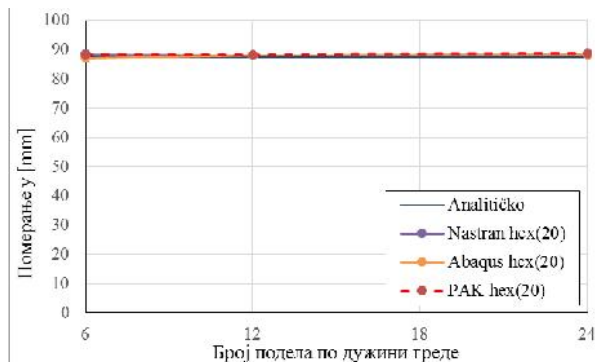
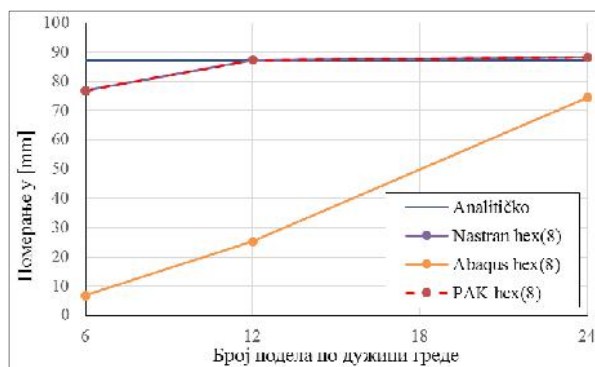
	Prog.\br.	6	12	24	48	96
	PAK	3.64	13.15	47.35	123.3	155.8
	Nastran	3.64	13.15	47.34	123.3	155.8
	Prog.\br.	6	12	24	48	96
	PAK	463.1	477.9	483.5	485.5	484.8
	Nastran	463.2	477.9	483.5	485.5	484.8
	Abaqus	463.2	477.9	483.5	485.5	484.8

Tabela 9. Test 2, numerički rezultati za heksagonalne elemente $u_z = 502.2mm$

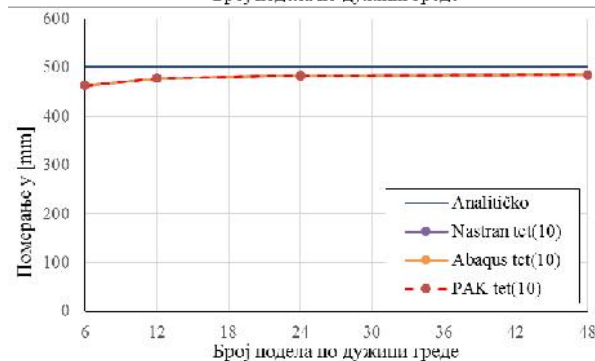
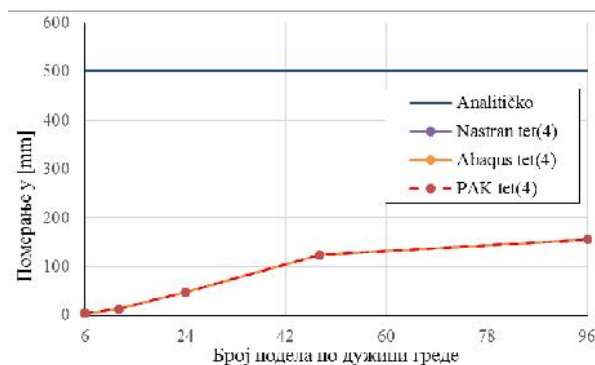
	Prog.\br.	6	12	24	48
	PAK	438.6	482	496.3	534.9
	Nastran	424.8	478.4	483.3	484.2
	Prog.\br.	6	12	24	48
	PAK	479.4	481.9	483.3	483.9
	Nastran	477.8	481.6	483.2	483.8
	Abaqus	470.4	479.5	482.7	483.7



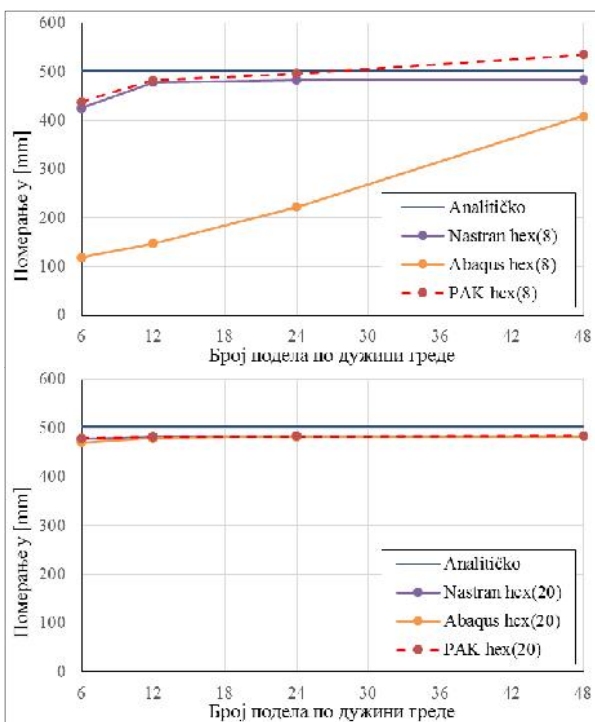
Slika 13. Maksimalno pomeranje zakrivljene grede, test 1



Slika 14. Maksimalno pomeranje zakrivljene grede, test 1



Slika 15. Maksimalno pomeranje zakrivljene grede, test 2



Slika 16. Maksimalno pomeranje zakrivljene grede, test 2

4. ZAKLJUČAK

Iz prikazanih rezultata može se videti da u velikoj većini posmatranih slučajeva postoji identično poklapanje rezultata između korišćenih programa za naponsko-deformacioni proračun.

Heksagonalni konačni elementi bez i sa međučvorovima generalno daju jako dobre rezultate u zavisnosti od broja elemenata kojima se definiše mreža konačnih elemenata što se može videti na osnovu prikazanih rezultata.

Rešenja dobijena heksagonalnim konačnim elementima bez i sa međučvorovima su jako blizu analitičkom rešenju, sa napomenom da heksagonalni konačni elementi bez međučvorova pokazuju određenu zavisnost između veličine elemenata i tačnosti dobijenih rezultat, što je u manjoj ili većoj meri generalno tačno za sve elemente.

Iz prikazanih rezultata jasno se može videti da su tetraedarski konačni elementi bez međučvorova previše kruti i rezultati koji se dobijaju njihovom primenom su loši čak i pri povećavanju broja konačnih elemenata u modelu tj. sa smanjenjem veličine elemenata. Ovo se može videti da je tačno za sva tri korišćena softvera, što ukazuje da tetraedarski elementi bez međučvorova generalno daju loše rezultate.

Tetraedarski elementi sa međučvorovima daju dobra poklapanja sa analitičkim rešenjima, ali treba naglasiti da postoji određena zavisnost između veličine elemenata i tačnosti rešenja koja se dobijaju.

Na kraju analize prikazanih rezultata može se preporučiti upotreba heksagonalnih konačnih elemenata bez međučvorova naspram heksagonalnih i tetraedarskih konačnih elemenata sa međučvorovima, jer se ovim značajno umanjuje broj čvorova u modelu i time skraćuje vreme proračuna kao i smanjuju zahtevi u pogledu neophodnih računarskih resursa da se izvrši proračun.

Treba napomenuti, da pravljenje mreže sa heksagonalnim konačnim elementima za složenu geometriju zahteva daleko više vremena, kako se mora izvršiti podela geometrije na manja tela i ručno kontrolisati broj podela da bi se ostvarilo poklapanje čvorova između podeljenih delova geometrije koje je neophodno za povezivanje mreža u jednu celinu pre vršenja proračuna. Iz ovoga razloga često se koriste tetraedarski konačni elementi sa međučvorovima jer oni omogućavaju brzo pravljenje mreže i time skraćuju neophodno vreme za dobijanje rezultata.

ZAHVALNICA

Autori izražavaju zahvalnosti za podršku od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja, Republike Srbije za projekte TR32036 i TR37013.

LITERATURA

- [1] M. Kojić, P. Slavković, M. Živković, N. Grujović, PAK-C Program za analizu konstrukcija MKE, Korisничко упутство, Универзитет у Крагујевцу Факултет инжењерских наука – Лабораторија за софтверски инжењеринг, Крагујевац, 2016
- [2] NX Nastran User's Guide, Siemens Product Lifecycle Management Software Inc. 2013
- [3] Abaqus 6.11, Theory Manual
- [4] K. Bathe, Finite element procedures, Prentice Hall: Pearson Education, Inc, 2006.
- [5] MERLIN, Theory Manual, March 5, 2006
- [6] Plaxis, Scientific Manual, 2013
- [7] M. Kojić, P. Slavković, M. Živković and N. Grujović, Метод коначних елемената 1 - Линеарна анализа, Крагујевац: Универзитет у Крагујевцу, Машински факултет, 2010.
- [8] M. Neal и R. Harder, „A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy,“ Finite Element Analysis Desing , т. 1, pp. 3-20, 1985.